Table des matières

Chapitre 2 - Trigonométrie

I Résolution des équations trigonométriques

I. 1 Résolution des équations fondamentales : $\cos(\mathbf{x}) = \mathbf{a},\ \sin(\mathbf{x}) = \mathbf{a},\ \tan(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$

I. 1. a Résolution de $\cos(x) = a$

Proposition 1. Soit $a \in [-1, 1]$. Il existe alors un unique angle θ dans $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arccos(a)$

⚠ $\arccos(a)$ est par définition un nombre dans $[0, \pi]$.

⚠ La fonction arccos n'est pas défini sur $\mathbb{R}$, mais seulement sur $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos a$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/6$	0

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes : $\cos(x) = -2$, $\cos(x) = -1$, $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $\cos(x) = 1$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(x) = \frac{1}{2}$. Sur $[0, \pi]$ il y a une unique solution, qui est par définitioin $x = \arccos(\frac{1}{2}) = \pi/3$
Sur $[-\pi, \pi]$, il y a 2 solutions, $\pi/3$ et $-\pi/3$ par symmétrie de la fonction cos.
Sur $\mathbb{R}$ il y a une infinité de solutions données par :

$$x \equiv \pi/3\,[2\pi]$$

ou

$$x \equiv -\pi/3\,[2\pi]$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\quad \mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\quad \mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\quad \mathcal{S} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\quad \mathcal{S} = \pm\arccos(a) + 2\pi\mathbb{Z}$

Exemple 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

Correction Notons $y = 3x$. On a vu que y vérifié :

$$y \equiv \pi/3\,[2\pi]$$

ou

$$y \equiv -\pi/3\,[2\pi]$$

Soit en revenant à la variable x :

$$3x \equiv \pi/3\,[2\pi]$$

ou

$$3x \equiv -\pi/3\,[2\pi]$$

Ce qui est équivalent à

$$x \equiv \pi/9\,[2\pi/3]$$

ou

$$x \equiv -\pi/9\,[2\pi/3].$$

On obtient ainsi les solutions sur $[0, 2\pi[$:‘

- $\pi/9$,
- $\pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$,
- $\pi/9 + 4\pi/3 = 13\pi/9$
- $\pi/9 + 6\pi/3 = 19\pi/9 > 2\pi$ on est allé trop loin,$\pi/9 + 6\pi/3$ n'est pas solution sur $[0, 2\pi[$.

On refait la même chose avec $-\pi/9$:

- $-\pi/9$,(qui n'est pas solution car n'est pas dans $[0, 2\pi[$)
- $-\pi/9 + 2\pi/3 = 5\pi/9$,
- $-\pi/9 + 4\pi/3 = 11\pi/9$
- $-\pi/9 + 6\pi/3 = 17\pi/9$

Les solutions de $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9, 5\pi/9, 11\pi/9, 17\pi/9\}$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(x) = \frac{7}{8}$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. b Résolution de $\sin(x) = a$

Proposition 2. Soit $a \in [-1, 1]$. Il existe alors un unique angle θ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arcsin(a)$.

Par définition $\arcsin(a) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin a$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes : $\sin(x) = -6$, $\sin(x) = -1$, $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(x) = 1$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution

$$x = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi/3$$

Sur $[-\pi, \pi]$ les solutions sont

$$x = \pi/3 \quad \text{ou} \quad x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont

$$\mathcal{S} = \{\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = -\frac{\pi}{2} + +2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\mathcal{S} = \pm \arcsin(a) + 2\pi\mathbb{Z}$ $\cup\, \pi + \arcsin$

Exemple 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction On a vu que les solutions de $\sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ étaient données par

$$y \equiv \pi/3\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv 2\pi/3\,[2\pi].$$

Donc

$$3x \equiv \pi/3\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv 2\pi/3\,[2\pi].$$

Soit encore :

$$x \equiv \pi/9\,[2\pi/3] \quad \text{ou} \quad x \equiv 2\pi/9\,[2\pi/3].$$

- $\pi/9$
- $\pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$
- $\pi/9 - 2\pi/3 = -5\pi/9$
- $\pi/9 - 4\pi/3 = -11\pi/9 < -\pi$ n'est donc pas solution sur $[-\pi, \pi[$.

et pour $2\pi/9$

— $2\pi/9$
— $2\pi/9 + 2\pi/3 = 8\pi/9$
— $2\pi/9 - 2\pi/3 = -4\pi/9$
— $2\pi/9 - 4\pi/3 = -10\pi/9 < -\pi$ n'est donc pas solution sur $[-\pi, \pi[$.

Les solutions sur $[-\pi, \pi[$ sont données alors par :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 2\pi/9, 7\pi/9, -5\pi/, 8\pi/9, -4\pi/9\}$$

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $\sin(4x) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{1}{5}$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. c Résolution de $\tan(x) = a$

Proposition 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe alors un unique angle θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arctan(a)$

Valeurs particulières :

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan a$	-$\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes : $\tan(x) = -1$, $\tan(x) = 0$, $\tan(x) = 1$, $\tan(x) = -\sqrt{3}$, $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ admet pour solution, $x = \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\pi/6$.
Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont donc :

$$\{-\pi/6 + k\pi \,|\, k \in /Z\}$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \{\arctan(x) + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction On a vu que les solutions de $\tan(y) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ étaient

$$y \equiv -\pi/6\,[\pi]$$

Donc

$$\frac{x}{2} \equiv \frac{-\pi}{6}\,[\pi],$$

Soit

$$x \equiv \frac{-\pi}{3}\,[2\pi].$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont $\{-\pi/3\}$.

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $\tan(3x) = 1$ et $\tan(x) = -2$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. d Résolution de $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, $\tan(x) = \tan(y)$

D'après les résultats précédents, on a :

$$\cos x = \cos y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan y \;\Leftrightarrow\; x \equiv y\,[\pi]$$

Pour résoudre les autres équations du type $\cos(x) = \sin(y)$ on se ramène à une équation précédente par exemple en faisant $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin(y)$ et en résolvant :

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$$

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan x$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction Sur $\mathbb{R}$ l'équation a pour solution

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{12}\,[2\pi/3] \end{cases}$$

On cherche les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$:

- $-\frac{3\pi}{4} \notin [0, 2\pi[$
- $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} \notin [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} \in [0, 2\pi[$

— $-\frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{3}=\frac{23\pi}{12} \in [0, 2\pi[$

Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S}=\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\}.$$

I. 2 Résolution des autres équations

Méthode générale : Transformer l'expression pour se ramener à résoudre des équations fondamentales.

I. 2. a Équation de type $a\cos(x) + b\sin(x) = c$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$

Le but est de factoriser l'expression pour faire apparaître un seul cosinus. Pour cela, on cherche $r \in \mathbb{R}^+$, et $\varphi \in [0, \pi[$ tels que

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x - \varphi)$$

On obtient :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x)\cos(\varphi) + r\sin(x)\sin(\varphi)$$

En identifiant on obtient :

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = a \\ \text{et} \\ r\sin(\varphi) = b \end{cases}$$

Ainsi on doit avoir $r^2 = a^2 + b^2$ et

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \text{et} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Une fois sous cette forme on résout

$$r\cos(x - \varphi) = c$$

Exemple 4. Résoudre $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$.

Correction On cherche $r > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = r\cos(x - \varphi)$ D'après les calculs précédents on sait que nécessairement

$$r^2 = 3 + 1 = 4$$

donc $r = 2$ car $r > 0$. On a ensuite

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$$

Donc l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$ équivaut à

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{6}\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

Remarque. En physique, cette méthode permet de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal défini comme la somme de deux signaux.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0,\pi[$ les équations suivantes : $\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=-\sqrt{2}$.

I. 2. b Équation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être prise comme variable

Il s'agit des équations où l'on peut poser le changement de variable $X=\cos(x)$ ou $X=\sin(x)$ ou $X=\tan(x)$. On reconnaît ces équations lorsque l'on peut mettre l'équation à résoudre sous la forme d'une équation ne comportant soit que des $\cos(x)$, $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)\ldots$, soit que des $\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\sin^3(x)\ldots$, soit que des $\tan(x)$, $\tan^2(x)$, $\tan^3(x)\ldots$.

- Poser X égal à $\cos x$ ou $\sin x$ ou $\tan x$.
- Résoudre l'équation en X du second, troisième... degré ainsi obtenue.
- Revenir ensuite à x en résolvant des équations fondamentales.

Exemple 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0,2\pi[$ l'équation : $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$.

Correction On pose $X=\cos(x)$ on obtient

$$2X^2+X-1=0,$$

dont les solutions sont $X=-1$ et $X=\frac{1}{2}$. L'équation est équivalent à

$$\begin{cases} \cos(x)=-1 \\ \text{ou} \\ \cos(x)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x\equiv\pi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv\frac{\pi}{3},[2\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv-\frac{\pi}{3},[2\pi] \end{cases}$$

Sur $[0,2\pi[$ les solutions sont donc :

$$\mathcal{S}=\{\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\}.$$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0,2\pi[$ les équations suivantes : $4\cos^2(x)-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x)+\sqrt{6}=0$, $\tan^3(x)-\sqrt{3}\tan^2(x)-\tan(x)+\sqrt{3}=0$ et $2\sin^2(x)+5\cos(x)-4=0$.

I. 2. c Autres types d'équation

Lorsqu'on est dans aucun des cas précédents, on utilise les formules trigonométriques pour se ramener à une équation factorisée dont chaque terme est une équation fondamentale.

Exemple 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Correction

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathfrak{Re}(e^{3ix}) \\
&= \mathfrak{Re}(e^{ix^3}) \\
&= \mathfrak{Re}((\cos(3x) + i\sin(x))^3 \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 1 + \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\
&= -2\cos(x) + 2\cos^2(x) + 4\cos^3(x)
\end{aligned}$$

L'équation ést donc équivalente à

$$-\cos(x) + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) = 0.$$

On fait le changement de variable $X = \cos(x)$ on obtient :

$$-X + X^2 + 2X^3 = 0$$

Soit

$$X(2X^2 + X - 1) = 0$$

Les solutions sont donc $X = 0$ ou $2X^2 + X - 1 = 0$. En revenant à la variable x on obtient $\cos(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ Les solutions sont donc

$$\begin{cases}
x \equiv \pi\,[2\pi] \\
\text{ou} \\
x \equiv \frac{\pi}{3}, [2\pi] \\
\text{ou} \\
x \equiv -\frac{\pi}{3}, [2\pi] \\
\text{ou} \\
x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]
\end{cases}$$

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$: $\cos(2x) + \cos(x) = \sin(2x) + \sin(x)$.

Correction On utilise les formules d'additivité de cosinus et sinus :

$$\cos(2x) + \cos(x) = 2\cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$\sin(2x) + \sin(x) = 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

On obtient donc l'équation :

$$\cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

soit

$$\cos(\frac{x}{2})(\cos(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2})) = 0$$

Ce qui équivaut

$$\begin{cases} \cos(\frac{x}{2}) = 0 \\ \text{ou} \\ (\cos(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ \text{ou} \\ \cos(\frac{3x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv \pi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = (\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2})\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = (-\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2})\,[2\pi] \end{cases}$$

II Résolution des inéquations trigonométriques

II. 1 Résolution des inéquations fondamentales

Les inéquations fondamentales sont les inéquations de type $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$, $\tan x < a$.

On résout GRAPHIQUEMENT sur le cercle trigonométrique.

Remarque. ⚠ Ne jamais résoudre une inéquation sans passer par le cercle trigonométrique.

Exemple 7. Résoudre sur $[0, 2\pi[$ puis sur $\mathbb{R}$l'inéquation : $\cos(x) < \frac{1}{2}$.

Correction Sur $[0, 2\pi]$ les solutions sont

$$]\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}[=]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$$

Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi[$$

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ les inéquations suivantes : $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan(x) \geq -1$ et $-1 < \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

II. 2 Résolution des autres inéquations

II. 2. a Inéquation de type $a\cos(x) + b\sin(x)$

Exemple 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, \pi[$: $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > \sqrt{2}$.

Correction On va mettre $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$ pour $r > 0$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
On a vu que $r^2 = 3 + 1 = 4$, ce qui donne $r = 2$.
Donc $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{-1}{2}$ D'où $\varphi = \frac{-\pi}{6}$.
Donc l'équation devient

$$2\cos(x + \frac{\pi}{6}) > \sqrt{2}.$$

Soit

$$\cos(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc sur $]-\pi, \pi]$:

$$-\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$$

Soit

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$$

Donc sur $\mathbb{R}$ les solutions sont données par :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi[$$

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, \pi[$ les inéquations suivantes : $\cos(x) - \sin(x) \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leq -\sqrt{2}$.

II. 2. b Inéquation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être pris comme variable

Exemple 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation : $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$.

Correction $2X^2 + X - 1 > 0$ a pour solution

$$X \in]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, \infty[$$

Donc l'équation $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$ est équivalente à

$$\cos(x) > \frac{1}{2}$$

Exercice 13. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ les inéquations suivantes : $4\cos^2(x) - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{6} < 0$, $\tan^3(x) - \sqrt{3}\tan^2(x) - \tan(x) + \sqrt{3} \geq 0$ et $2\sin^2(x) + 5\cos(x) - 4 \leq 0$.

III Etude des fonctions trigonométriques

III. 1 Reduction du domaine d'étude

Définition 1. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f **est paire** si
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$
    et
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f **est impaire** si
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$
    et
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'originie.

Remarque. Lorsqu'une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie indiquée ci-dessus pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples.
- Exemples de fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Exemples de fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 1. Que dire de l'opposée, l'inverse d'une fonction paire (resp. impaire) ?
Que dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) ?
Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Que dire de la composée de deux fonctions paires (resp impaires) ?
Que dire de la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque. Il peut exister d'autres symétries : eg $f(a-x) = f(x)$ pour un $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la courbe de f sera symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$. On peut alors diminuer le domaine d'étude de "moitié" : en considérant seuelement la partie $]-\infty, \frac{a}{2}]$

Exemple : $f(x) = \cos(2x)$ alors $f(\pi-x) = f(x)$ donc la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Définition 2. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

- ⋆ $x \in D_f \iff x + T \in D_f$
  et
- ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$

Graphiquement, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

Remarque. Si f est périodique de période T, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+kT) = f(x)$
Il suffit de l'étudier et de la tracer sur un intervalle de longueur T puis d'effectuer la translation de vecteur $T\vec{i}$ pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples. Exemples de fonctions périodiques : $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est T périodique.
2. Si g est une fonction périodique de période T et $(a,b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, alors $h : x \mapsto g(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$.
   Application : donner la période des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ et $x \mapsto \tan(3x)$.